我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园
首页
新随笔
联系
订阅 XML
管理

< 2022年3月 >

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

搜索

找找看
谷歌搜索

常用链接

我的随笔
我的评论
我的参与
最新评论
我的标签

积分与排名

积分 - 457097
排名 - 1198

概率统计17——点估计和连续性修正

原文 | https://mp.weixin.qq.com/s/NV3ThVwhM5dTIDQAWITSQQ

概率（probabilty）和统计（statistics）是两个相近的概念，其实研究的问题刚好相反。

概率是使用一个已知参数的模型去预测这个模型所产生的结果，并研究结果的相关数字特征，比如期望、方差等。假设现在已知一个射击运动员的得分服从均值为8.2，方差为1.5的正态分布，就可以对这名运动员下一次射击的得分情况有个大致的预估。

统计与概率正好相反，是先有一堆数据，然后利用这些数据推测出模型和模型的参数。现在来了一名陌生的运动员，我们对他一无所知，不过他宣称自己是一名优秀的职业运动员。在进行了一系列射击测试后，教练组收集到了一批这名运动员的成绩，通过观察数据，认为他的成绩符合正态分布（也就是确定了模型），之后再进一步通过数据推测模型参数的具体值。对于正态分布来说，参数是均值和方差。

这样看来，我们碰到的大多数问题都是统计问题，虽然概率是随机事件的客观规律，但遗憾的是，这个规律总是作为未知量出现的，作为补偿，我们拥有一系列数据样本，虽然这些样本可能远小于整体，但仍然可以以点带面，根据这些样本对整体参数进行估计，得出关于整体概率分布的近似值。这个根据样本对总体参数进行估计的过程就是参数估计。根据参数性质不同，可分为点估计和区间估计。

点估计就是用样本统计量的某一具体数值直接推断未知的总体参数，得到的是一个具体的参数值。我们之前讲过的矩估计、最大似然估计、贝叶斯估计都是点估计。

我们以矩估计为例，重新看看怎样由样本估计总体。

总体数量和样本数量

我们经常用n表示总体的数量，究竟什么才算总体呢?

总体总是给人以“多”的概念，但事实并非如此，不同问题的“总体”数量可能相差很远。比如一个啤酒厂一年生产的罐装啤酒是1000万，一个班级的学生数是60人，无论是1000万还是60，都是总体。用n表示总体的数量。

既然是用样本估计总体，当然少不了抽样，关于抽样可参考：数据分析(4)——闲话抽样 | 看似公平的随机抽样是否真的公平？。 用m表示样本的

随笔分类 (211)

★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)

随笔档案 (205)

2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多

阅读排行榜

1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

1. 寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

数量。

估计总体的均值

医生的判断很大程度依赖于血液检测的结果。从抽血结束到取得报告单需要一段时间，这段时间并不确定，也许运气较好，十几分钟就拿到了，也可能等上一小时。现在得到了一组样本，X = {x_1, x_2, ..., x_m}，其中每个数据代表了一名患者取得报告单前的等待时间。我们的目标是根据这组样本对整体的平均等待时间做一个估计。

计算方式很简单，只需要计算样本的均值就可以了：

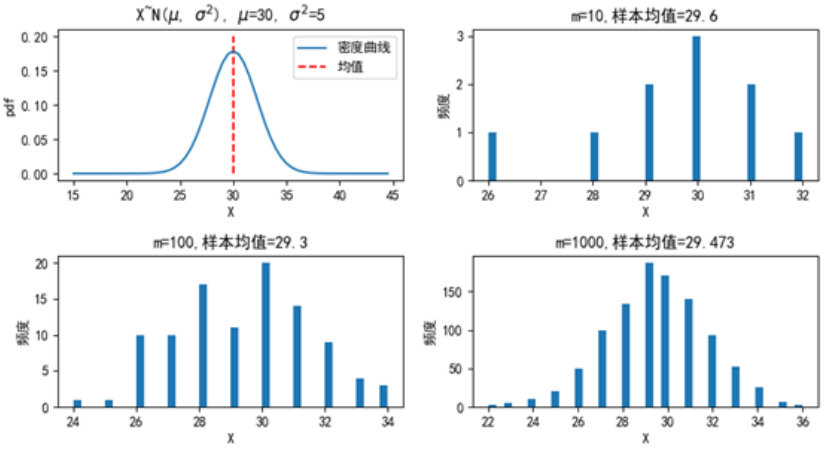
$$\bar{x} = \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$$

我们认为样本的分布与整体的分布相似，这个均值是根据目前已知的数据对总体的最佳近似描述。这种用样本均值估计总体均值的方法称为矩估计，估计的结果是总体均值的点估计量。

下面的代码展现了整体分布和抽样分布的关系：

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import stats

fig = plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.subplots_adjust(hspace=0.5)  # 调整子图之间的上下边距

mu, sigma_square = 30, 5 # 均值和方差
sigma = sigma_square ** 0.5 # 标准差
xs = np.arange(15, 45, 0.5)
ys = stats.norm.pdf(xs, mu, sigma)
ax = fig.add_subplot(2, 2, 1)
ax.plot(xs, ys, label='密度曲线')
ax.vlines(mu, 0, 0.2, linestyles='--', colors='r', label='均值')
ax.legend(loc='upper right')
ax.set_xlabel('X')
ax.set_ylabel('pdf')
ax.set_title('X~N($\mu$, $\sigma^2$), $\mu$={0}, $\sigma^2$={1}'.form

for i in [1, 2, 3]:
    m = 10 ** i # 样本数量
    np.random.seed(m)
    X = stats.norm.rvs(loc=mu, scale=sigma, size=m) # 生成m个符合正态分布
    X = np.trunc(X) # 对数据取整
    mu_x = X.mean() # 样本均值
    ax = fig.add_subplot(2, 2, i + 1)
    ax.hist(X, bins=40)
    ax.set_xlabel('X')
    ax.set_ylabel('频度')
    ax.set_title('m={0},样本均值={1}'.format(m, mu_x))

plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']  # 用来正常显示中文标签
# plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False  # 解决中文下的坐标轴负号显示
plt.show()
```

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解
写的很好，不过LU 分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵
--wiki3D
3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1（sin和cos）
很nice
--尹保棕
4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)
有些图片挂了呢
--ccchendada
5. Re:寻找“最好” （2）——欧拉-拉格朗日方程
提个issue，最速降线中
$ v = {2gh}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立座标系
--trustInU



可以看到，抽取的样本越多，样本的分布越接近整体的分布。这里有问题的是均值的符号，在各种资料中一会是μ，一会是戴帽子的μ，一会是x拔，到底用哪个？

μ：整体样本的均值，是根据全体 n 个样本计算得出的，$\mu = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

$\bar{x}$：样本的均值，是根据 m 个样本计算得出的，$\bar{x} = \frac{1}{m}(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)$

$\hat{\mu}$：对总体均值的估计，至于怎么估计的是另一回事。矩估计中$\hat{\mu} = \bar{x}$

过去我们一直说某些问题符合X~N(μ, σ^2)的分布，这里μ是总体均值；在最大似然估计中得出的结果用$\hat{\mu}$表示，说明这是通过样本对整体均值的一个点估计量。

估计总体的方差

假设我们已经预先计算出了均值的点估计量，是否可以像计算总体方差一样计算样本方差呢？

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \overset{?}{\Longrightarrow} \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \hat{\mu})^2 \quad ①$$

从上面的整体分布图可以看到，大部分数据集中在均值附近，极端值出现的概率很低，这意味着对于抽样来说，样本数越小，抽到极端数值的可能性就越小。方差刻画了数据相对于期望值的波动程度，由于样本的极端值出现的概率很低，因此样本的波动很可能低于总体的波动，方差较整体方差更小。为了应对这种情况，我们经常看到的是另一个计算样本方差的公式：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \hat{\mu})^2 \quad ②$$

a/(m - 1)肯定大于a/m，这使得②的结果稍大于①，m的值越小，①和②的差别越明显。随着样本数量的增加，取得极端值的机会也变大，①和②的差别也会越来越小。将样本的方差作为总体方差的点估计量，通常用s^2表示。

值得一提的是，如果我们有m个样本，在计算这些样本的实际方差时，直接用①；如果是用这些样本估计总体的方差，应该使用②。

样本的均值与方差：$\mu_s = \bar{x}$，　$\sigma_s^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \mu_s)^2$

用样本估计总体的均值与方差：$\hat{\mu} = \bar{x}$，　$s^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \hat{\mu})^2$

估计总体的比例

很多人会在30分钟之内取得报告单，同样也有很多人要等更久。我们可以计算出样本中成功人数（30分钟之内拿到报告的人数）的比例，并用这个比例作为总体概率的点估计量：

$$\hat{p} = \frac{\text{样本中成功的数量}}{\text{样本总数}}$$

到目前为止，点估计仍然很简单，所以经常有人吐槽：概率这么简单的玩意有啥值得研究的？

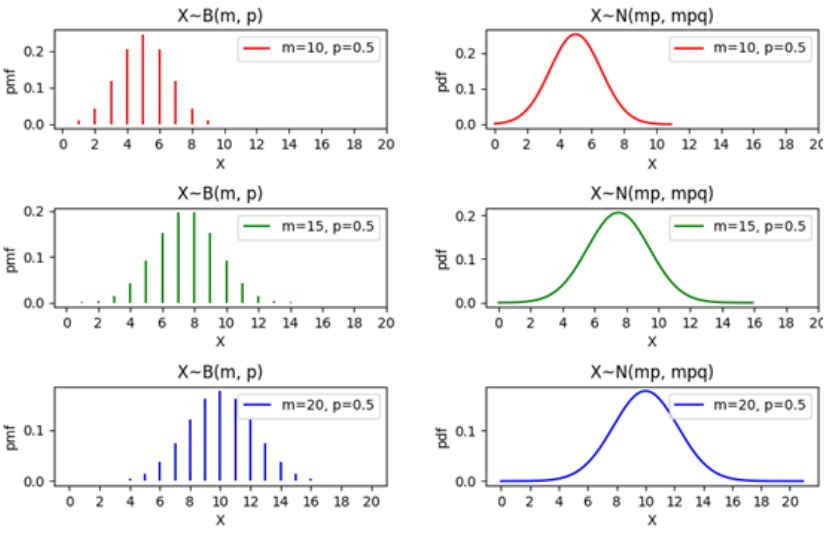
样本出现的概率

经过多年的统计分析，医院已经明确告知，每个患者都有50%的概率会在30分钟内拿到报告单。我们用p=50%表示总体中所有在30分钟之内拿到报告的人数的占比。如果把一个患者在30分钟之内拿到报告看作成功，用随机变量X表示m个样本中的成功数量，那么X符合参数为m和p的二项分布，X~B(m, p)，即成功次数符合试验次数和成功率的二项分布。保持试验次数m不变，二项分布近似于均值为mp、方差为mpq的正态分布（q = 1 - p）。

下面的代码画出了二项分布和其近似的正态分布：

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import stats

fig = plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.subplots_adjust(hspace=0.8, wspace=0.3)  # 调整子图之间的边距

p = 0.5 # 每次试验成功的概率
q = 1 - p # 每次试验失败的概率
m_list = [10, 15, 20] # 试验次数
c_list = ['r', 'g', 'b'] # 曲线颜色
m_max = max(m_list)

# 二项分布 X~B(m,p)
for i, m in enumerate(m_list):
    ax = fig.add_subplot(3, 2, i * 2 + 1)
    xs = np.arange(0, m + 1, 1) # 随机变量的取值
    ys = stats.binom.pmf(xs, m, p) # 二项分布 X~B(m,p)
    ax.vlines(xs, 0, ys, colors=c_list[i], label='m={}, p={}'.format(
    ax.set_xticks(list(range(0, m_max + 1, 2))) # 重置x轴坐标
    ax.set_xlabel('X')
    ax.set_ylabel('pmf')
    ax.set_title('X~B(m, p)')
    ax.legend(loc='upper right')

# 保持二项分布试验的次数m不变，二项分布近似于均值为mp、方差为mp(1-p)的正态分布:
for i, m in enumerate(m_list):
```

```
        ax = fig.add_subplot(3, 2, i * 2 + 2)
        xs = np.arange(0, m + 1, 0.1) # 随机变量的取值
        mu, sigma = m * p, (m * p * q) ** 0.5
        ys = stats.norm.pdf(xs, mu, sigma)
        ax.plot(xs, ys, c=c_list[i], label='m={}, p={}'.format(m, p))
        ax.set_xticks(list(range(0, m_max + 1, 2)))  # 重置x轴坐标
        ax.set_xlabel('X')
        ax.set_ylabel('pdf')
        ax.set_title('X~N(mp, mpq)')
        ax.legend(loc='upper right')

    plt.show()
```



某天来了20名患者，其中有12人在30分钟之内拿到了报告单（12个成功）。根据二项分布，这种情况出现的概率是：

$$P(X = 12\text{个成功}) = C_{20}^{12} p^{12} q^{20-12}$$

100天过去，每天都有20名患者接受验血，x_i人在30分钟内拿到了报告，每天的样本都对应一个概率：

$$P_i(X = x_i) = C_{m_i}^{x_i} p^{x_i} q^{m_i - x_i}$$

上式中所有m_i的数量都是20，之所以用m_i表示，是为了强调虽然每天的样本数量一致，但样本本身是不同的。如果将这些概率也看成随机变量，那么这些变量也必然会符合某一个分布，只要弄清这个分布，就能回答产生某个样本的概率。既然可以通过样本知道样本中成功数量的占比，那么这个分布也就等同于“样本中成功数量的占比”的概率。比如第10天的样本中成功数量的占比是p_{10}=45%，我们的目标是了解p_{10}产生的概率有多大，即P(p_{10})=？换句话说，我们希望知道所有$P_i(X=x_i)$构成的分布。

我们用p_s表示某个特定样本中成功数量的占比，借助期望和方差来窥探p_s的分布。一个明显的关系是，如果总体中有50%的人可以在30分钟内拿到报告，那么我们也同样期望在样本中看到这个比例，这也是我们能够用样本估计总体的基础。用随机变量X表示样本中成功的数量，p_s = X/m：

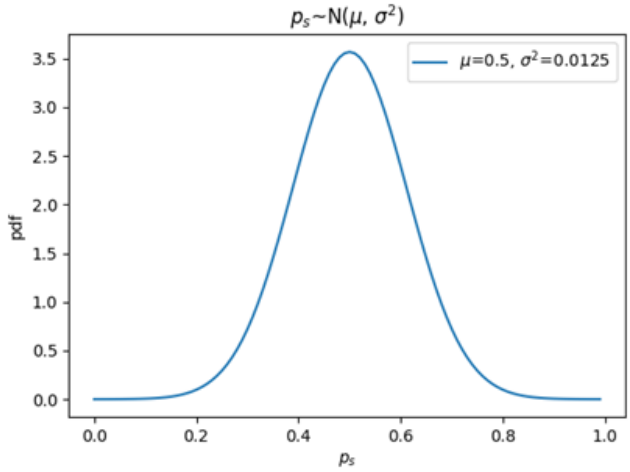
$$E[p_s] = E\left[\frac{X}{m}\right] = \frac{E[X]}{m}$$

我们已经知道X~B(m, p)，这里m是样本数量，p是每个样本成功的概率，是预先给出的。二项分布的期望是E[x] = mp，方差是Var(X)=mpq，q = 1 – p，因此：

$$E[p_s] = \frac{E[X]}{m} = \frac{mp}{m} = p$$

$$Var(p_s) = Var\left(\frac{X}{m}\right) = \frac{Var(X)}{m^2} = \frac{mpq}{m^2} = \frac{pq}{m}$$

$E[p_S]$告诉我们，样本中成功数量的占比与整体中成功数量的占比一致；$Var(p_S)$告诉我们，m越大，p_S的方差越小，样本中成功数量的占比越近总体中成功数量的占比，用p_S来估计p越可靠。既然二项分布X~B(m, p)可以由X~N(mp, mpq)来近似，那么p_S =X/m也可以由p_S~N(p, pq/m)来近似。对于本例来说，p=0.25，pq/m=0.0125：



值得注意的是，比例的分布刻画的是样本成功数占比（即X/m）的变化情况，而二项分布刻画的是特定数量的样本中成功数（即X）的变化情况。比例的取值范围是[0, 1]，因此在描述p_S的分布时，随机变量的有效取值范围是[0, 1]。当m固定时，每个成功数占比都代表一个特定的样本，我们可以借用p_S的分布计算从总体中抽样出某个固定数量样本的概率。

连续性修正

对于二项分布来说，保持试验次数n不变，二项分布**近似于**均值为np、方差为npq的正态分布。这里特别强调了“近似于”，是因为二项分布的随机变量是离散型的，而正态分布的随机变量是连续型，但是这又有什么关系呢？

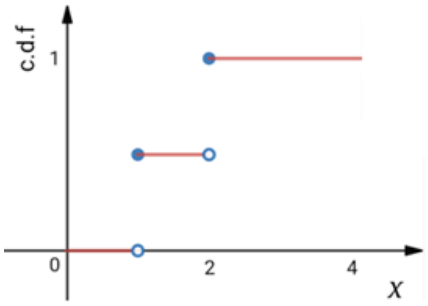
这里先要了解一下离散型分布函数和连续型分布函数的特点。对于连续型分布来说，其分布函数是用密度函数的积分表示的：

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

对于积分来说，a~b的区间与是否包含a点或b点没什么关系，对于连续型随机变量的累积概率来说：

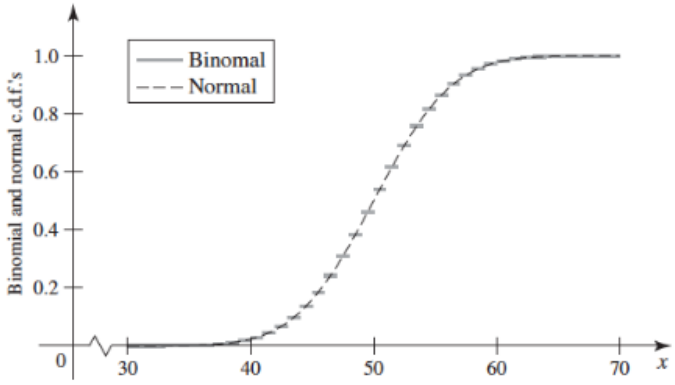
$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b)$$

但是上式对于离散型随机变量并不成立。下面是一个离散型分布函数，纵坐标的c.d.f是累积分布函数（cumulative distribution function）的缩写：

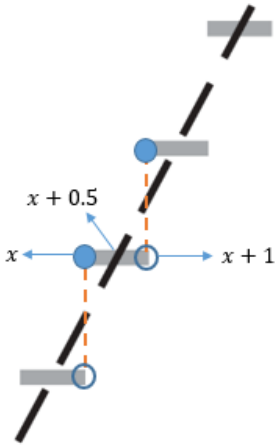


上图向我们展示了P(X < 1) = 0，P(X ≤ 1) = 0.5。这意味着对于离散型随机变量来说，经常有P(x ≤ a) ≠ P(x < a)的情况（并不总是不等，这要看a的取值，对于上图来说，P(X < 1.5) = P(X ≤ 1.5)），而连续型随机变量总是有P(x≤a) = P(x<a)。

μ=50，σ^2=25的正态分布X~N(μ, σ^2)可以用来近似n=100，p=0.5的二项分布X~B(n, p)，下图是二者的分布函数（注意这里的曲线是分布函数，而不是密度函数）：

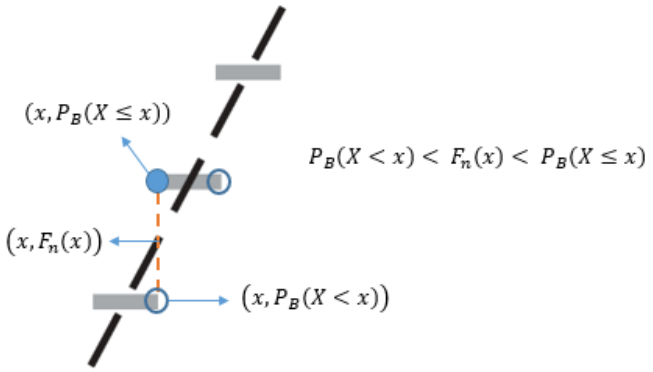


可以看出，由于二项分布的离散型随机变量只能取到整数，因此它的分布函数是阶梯状的，而正态分布的曲线穿过了每个阶梯的中心点，将阶梯分成了两部分，左半部分离散分布大于连续分布，右半部分则相反：

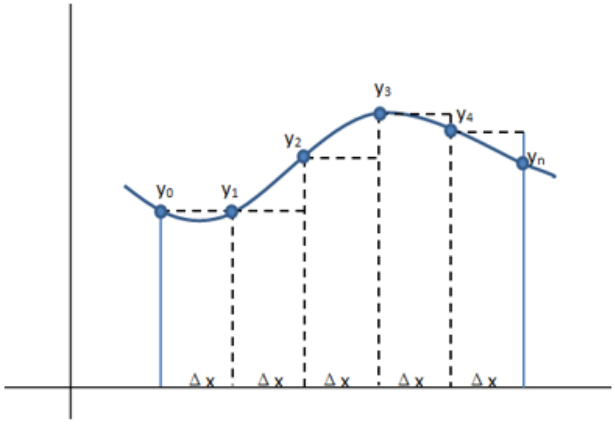


分别用$F_B(x)=P_B(X\le x)$和$F_n(x)=P_n(X\le x)$表示二项分布和正态分布的分布函数，对于整数x来说，在[x, x+0.5)区间内，$F_B(x) > F_n(x)$；在(x+0.5, x+1)区间内，$F_B(x) < F_n(x)$；只有在中心点，才有$F_B(x) = F_n(x)$。

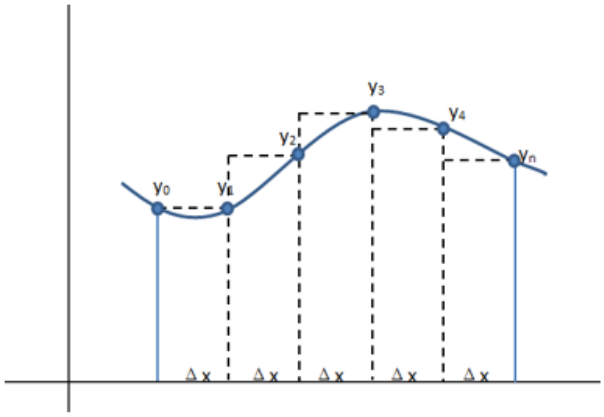
现在问题来了，用正态分布去做近似的时候，如果直接用$F_N(x)$去近似$P_B(X<x)$，那么结果会偏大；如果用$F_N(x)$去近似$P_B(X\leq x)$，则结果会偏小：



时大时小并不是个好主意，我们想要的是一个一致的近似，要么总是大，要么总是小。一个办法是对于X的正态连续性修正为±0.5，即用$F_N(x+0.5)$去近似$P_B(X < x)$和$P_B(X \leq x)$，得到的结果不会偏小；或用$F_N(x-0.5)$去近似$P_B(X < x)$和$P_B(X \leq x)$，得到的结果不会偏大。这有点类似于用黎曼和计算积分时选用左矩形公式还是右矩形公式：



$$S_{左矩形} \approx (y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})\Delta x$$



$$S_{右矩形} \approx (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\Delta x$$

回顾上一节的内容，我们计算出了样本占比p_S的正态分布近似，p_S的连续性修正为：

$$p_S = \frac{X}{m} \Rightarrow \frac{X \pm 0.5}{m} = p_S \pm \frac{1}{2m} \Rightarrow 连续性修正 = \pm\frac{1}{2m}$$

借助连续性修正可以求得：

$$P(p_S \le a) = \int_0^{a\pm\frac{1}{2m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

出处：微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”

随笔

分类: 概率

标签: 点估计, 连续性修正

好文要顶 关注我 收藏该文

我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288
+加关注

0 推荐 0 反对

« 上一篇： 概率统计16——均匀分布、先验与后验
» 下一篇： 概率统计18——再看大数定律

posted on 2020-02-10 12:25 我是8位的 阅读(2233) 评论(0) 编辑 收藏 举报

刷新评论 刷新页面 返回顶部

登录后才能查看或发表评论，立即 登录 或者 逛逛 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

编辑推荐：
· 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
· 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务